



TITLE:

空力音における粘性の役割(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

神部, 勉

CITATION:

神部, 勉. 空力音における粘性の役割(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 477: 117-125

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103335>

RIGHT:

空力音における粘性の役割

九大 工学部 神部 勉

(Kambe Tsutomu)

1. はじめに

固体の存在を介さずに、空気力学的に発生する音 (Aerodynamically generated sound) を略して空力音と呼ぶ。Lighthill¹⁾ の最初の理論以来、粘性項はその枠組みの中に入っている。しかし、非粘性流体の運動による発生音自体がよく知られていなかったこと、そして恐らくは粘性項が速度に関して線形でしかその効果が散逸であることもあって重要視されず、粘性は最初から省略されるか、途中まで残すかの違いはあった。結局省略されてしまうのが、おおかたの取扱いであった。

ところが空力音を予測して解析しようとする際には、粘性効果は省略してしまうわけにはいかないことが実験の結果わかってきた。²⁾ しかもそのような予測が、従来明確な形ではなかったことから、我々の実験の解析にむくような形で理論が与えられていない。そこで粘性が空力音にどのような結果

をもたらしすかを念頭におきつつ、流体力学の基礎方程式から空力音の方程式を導出し、それを"2渦輪の正面衝突"による放射音の実測にあてはめて、理論と実験の両面から、空力音の解析を試みた。

その結果、理論の公式が実測波形をかなりよく記述することが判明し、理論の正しさが証明されたと同時に、空力音そのものの存在も実験的に確認されたことになった。さらにこの解析の結果は、測定した音のみでなく、音源の渦運動についての情報をも含んでいる。すなわち、流れから離れた点での音の測定から、内部の渦運動の様子がわかるわけで、新しい実験手段として使える可能性もある。この方法は、内部の流れ場を外部物体(例えば hot wire など)で乱すことがないわけで、極めて自然な測定法といえなくもない。

この方法の有効性を示す結果を本稿の最後に示そう。それは放射音の解析から、"2渦輪の力学系"の全エネルギーが知られるということ、その減衰曲線が(一樣、等方性の)乱流のエネルギー減衰曲線と類似していることがわかってきた。このことが何を意味するかは、さらに研究の余地のあるところであろう。

2. 粘性空力音の一般的定式化

流体粘性を考慮した空力音の基礎方程式は、流体の圧縮性、粘性（熱伝導性）および粘性による発熱を含んだ、質量・運動量・エネルギー保存の式で与えられる：

$$\frac{D}{Dt} \rho = -\rho \nabla \cdot \underline{v}, \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt} \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{v}, \quad (2)$$

$$T \frac{D}{Dt} s = \nu \underline{e} : \underline{\nabla v} + \kappa \nabla^2 T. \quad (3)$$

ここで、 ρ , s , p , T , $\underline{v} = (v_i)$ はそれぞれ密度、エントロピー、圧力、温度、速度で、 $D/Dt = \partial/\partial t + (\underline{v} \cdot \nabla)$,

$$\underline{e} = (e_{ik}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

はひずみ速度テンソル、 ν , κ はそれぞれ粘性率、熱伝導率である。さらに、圧力 p , 密度 ρ を次の熱力学的関係式を使って、entropy s と enthalpy w とで表わす：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} dp &= dw - T ds, \\ \frac{1}{\rho} d\rho &= \frac{1}{c^2} dw - \left(\frac{T}{c^2} + \frac{1}{c_p} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、 $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$ は音速、 c_p は定圧比熱。無限遠では流体は静止と仮定し ($x \rightarrow \infty$ のとき、 $\underline{v} \rightarrow 0$)、局所的な流れ場を考える。上の式から、量 $(w + \frac{1}{2} v^2 - T_0 s)$ に対する

非同次の波動方程式が導かれる：

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(w + \frac{1}{2}v^2 - T_0 s) = -f(x, t), \quad (5)$$

ただし

$$f(x, t) = \operatorname{div}(\omega \times v) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v^2 - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (v \nabla : \underline{e}) \\ - \frac{4}{3} v \nabla^2 (\nabla \cdot v) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c_p} \frac{D}{Dt} s \right), \quad (6)$$

また c_0, T_0, \dots 等は，無限遠での音速，温度， \dots 等で， T_0 の相対的な変動は 小さいと仮定している。方程式 (5) は直ちに積分形に表わせる：

$$w + \frac{1}{2}v^2 - T_0 s = \frac{1}{4\pi} \int f(y, t - \frac{R}{c_0}) \frac{dy}{R}, \quad (7)$$

$$R = |x - y|.$$

(7) 式の被積分関数 (6) は複雑な形をしているが，流れから十分遠くの遠方場はかなり簡単になる。(6) を代入して，部分積分し，(3) 式および $|x| \rightarrow \infty$ で， $v \rightarrow 0$ ， $s \rightarrow s_0$ ， $T \rightarrow T_0$ ， $w \rightarrow p'/\rho_0$ ($p' = p - p_0$) となることを使っていると，結局

$$p'(x, t) = \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{x_i x_j}{r^3} \ddot{Q}_{ij}(t - \frac{r}{c_0}) + \frac{\rho_0}{15\pi c_0^2} \frac{1}{r} \ddot{K}(t - \frac{r}{c_0}) \quad (8)$$

ただし

$$Q_{ij}(t) = \frac{1}{12\pi} \int y_i (y \times \omega)_j dy,$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \int v^2(y, t) dy,$$

($r = |x|$) を得る. 不変量 $\int y \times (y \times \omega(y, t)) dy$ から,
 $\dot{Q}_{ij} = \dot{Q}_{ji}$ が導かれる. 音の遠方場 (8) の第2項は等方的な
 単極音を表わすのに対し, 第1項は4重極音を表わしている.
 非粘性 ($\nu = 0, \kappa = 0$) の流体運動では, 全運動エネルギー K
 は保存されるから, 第2項は消えて, 4重極項のみが残る.
 これは渦度 $\omega = \text{rot } v$ の非定常性によって生ずるので, 渦
 音 (vortex sound) とも呼ばれている. ここで渦の役割につ
 いて若干考察してみると, (1) 式を $-\nabla \cdot v = \frac{1}{\rho} D\rho/Dt$, (2) 式
 を $-v_t = \omega \times v + \nabla(w + \frac{1}{2}v^2)$ とし, 左辺を消去して

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \text{div}(\omega \times v) + \nabla^2(w + \frac{1}{2}v^2)$$

を得る. すなわち, 渦度 ω (正確には $\text{div } \omega \times v$) が密度変動
 の原因の一つを与えることがわかる. また渦領域から離れて,
 $\omega = 0$ のポテンシャル領域では, 第1項は0で, 第2項は速
 度ポテンシャル ϕ を使って, $-\nabla^2 \phi_t$ と表わせる. つまり,
 内部領域の ω の変動に起因する ϕ の変動が ρ の変動を与える
 ことがわかる.

現実の流体では必ず粘性があり, (8) の第2項の単極音
 を無視することができない. このことは従来見のがされてい
 る点である. この項の導出の過程で単極音が2つの要素から

なることが示される。1つは粘性散逸による発熱による局所的な膨張で、他は運動速度の減衰による断熱圧縮による効果である。すなわち、第2項の係数 $1/15$ と、 $(-1/10) + (1/6)$ と表わしたとき、第1項が前者から、第2項が後者から導かれる。単極成分のみならず、粘性があれば、渦の運動も当然変わるから、4重極音も非粘性のときと異なる波形を示すはずである。このことを次節で2つの渦輪の衝突の場合に詳しく調べてみる。

3. 2つの渦輪の正面衝突

半径 R 、強さ Γ の2つの渦輪の正面衝突の場合、音圧の遠距離場(8)は次の形に表わせる：

$$p'(r, \theta, t) = \frac{p_0}{4c_0^2} \frac{1}{r} (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}) \ddot{Q}(t - \frac{r}{c_0}) + \frac{p_0}{15\pi c_0^2} \frac{1}{r} \ddot{K}(t - \frac{r}{c_0}), \quad (9)$$

ただし

$$Q(t) = -2\Gamma R^2 Z.$$

ここで、 $2Z$ は2渦輪の距離を表わす(図1)。

これに対応した実験が行なわれ、実際に放射音が測定された。^{2, 3)} 上の(9)式の形を考慮し

て、測定された圧力信号を

$$p = p_g(t) (1 - 3\cos^2 \theta) + p_m(t)$$

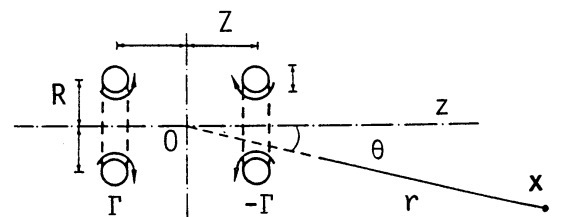


図1. 2渦輪の衝突

と表わして、4重極成分 p_q と単極成分 p_m とに分解した。渦輪の半径 $R_0 = 5.4 \text{ mm}$, 速度 $U = 57 \text{ m/s}$, $r = 500 \text{ mm}$ の場合のデータが図2の曲線Eで示されている。(a) は p_q を、(b) は p_m を示す。図の一点鎖線Iは非粘性の理論から得られる曲線で、波形の前半は実験曲線Eとよく一致するが、後半はまったく合わないこと

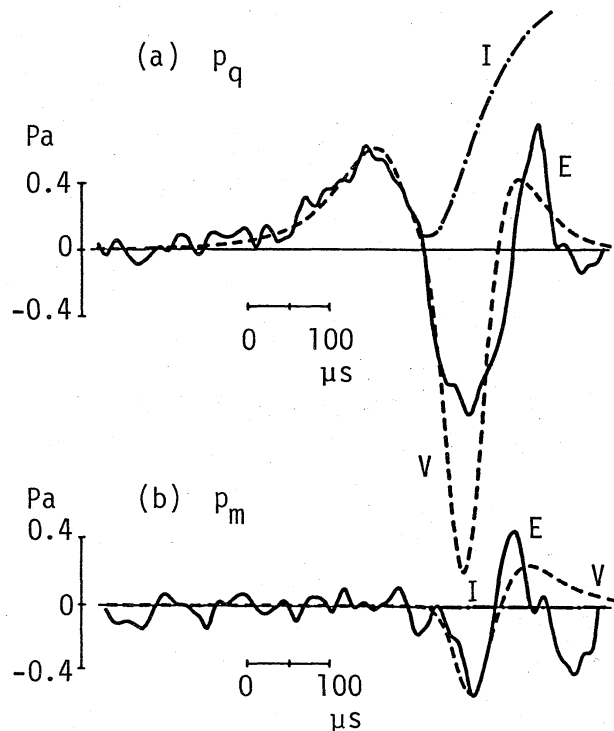


図2. 渦輪の衝突による放射音。
(a) 4重極成分, (b) 単極成分。

がわかる。他方、破線Vは(9)式と粘性渦運動の計算から得られる曲線で、 p_m , p_q のいずれもかなりよく実験波形を記述していることがわかる。bの曲線VはKを表わすことから、この渦輪のシステム全体のエネルギーKがわかり、それが図3に示されている。初期にはエネルギーが一定に保たれるが、渦輪の核が接近して相互作用し、渦の対消滅で渦核の強さが減少するに伴ない、エネルギーが急激に下る。

4. 乱流のエネルギー散逸の機構について

最後に、一様・等方性の乱流理論との関連性について述べ

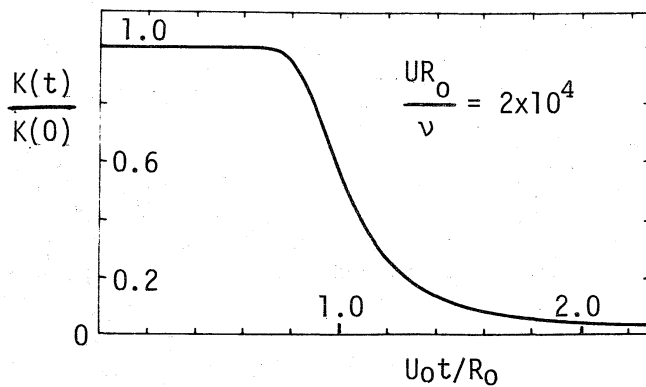


図3. 2渦輪の全運動エネルギー K , ($U_0 = \Gamma(0)/4\pi R_0$). 図2(b)の V と同等.

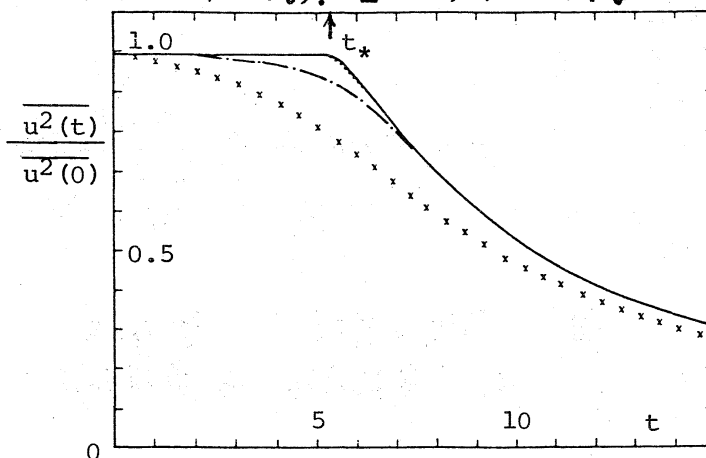


図4. 一様等方乱流の全エネルギー $\overline{u^2(t)}$.

xxx, $R = 128$; ---, $R = 813$;, $R = 32800$; —, $R = 524000$.

4である。⁴⁾ R が大きくなると, ある時刻 t_* で急激にエネルギー散逸が増大し, それまで一定であった K が急に減少する様子がみられる. これはエントロピー $-\frac{1}{2}\overline{\omega^2}$ が t_* で発散するため($R \rightarrow \infty$ の時), 散逸が急に増大するのだと説明され, これを energy catastrophe と呼んでいる. 同様の現象は, 文献5でも報告されている. 図3と図4の曲線の類似性は, 乱流のエネルギー散逸の機構の一つに "渦の衝突" があるのではないかという問いを提示しているようにみえる. 少なくとも, エネルギー散逸は渦線の stretching のみによっても起こるの

てみたい. 乱流の準正規分布の仮定のもとに, エネルギースペクトル $E(k, t)$ に対する微分・積分方程式が導かれる(t は時間, k は波数). それを初期条件 $E(k, 0) \propto k^4 e^{-2k^2}$ に対して解き, k について $E(k, t)$ を積分して, 全エネルギー $-\frac{1}{2}\overline{u^2(t)}$ を求め, レイノルズ数 R の4つの

値について示したのが図

ではなく、渦の衝突でも起こることをこの例は示している。この散逸は、渦の pair annihilation による enstrophy catastrophe と結びついており、2次元でも成立する散逸機構である (vortex stretching は3次元流においてのみ起こる)。

REFERENCES

- 1) Lighthill, M.J. (1952): *On sound generated aerodynamically, I. General Theory*, Proc. R. Soc. A 211, 564-587.
- 2) 蓑田・神部(1982): "渦輪の衝突による発生音(粘性効果について)", 九大工学集報, 55巻, 1号, 1-7.
- 3) Kambe T. & Minota, T. : *Acoustic wave radiated by head-on collision of two vortex rings*, submitted to Proc. R. Soc. London.
- 4) Andre, J.C. & Lesieur, M. (1977): *Influence of helicity on the evolution of isotropic turbulence at high Reynolds number*, J. Fluid Mech. 81, 187.
- 5) Tatsumi, T. & Kida, S. (1980): *The modified cumulant expansion for isotropic turbulence at large Reynolds numbers*, J. Phys. Soc. Jpn, 49, 2014-2025.